Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Профиль олимпиады: «Компьютерное моделирование и графика», тур по математике и инженерной графике

Класс участия: 8-9 **Вариант задания: 2**

Задача 1 (10 *баллов*). На весенней распродаже девушка приобрела зимние ботинки со скидкой 40% и шапку со скидкой 20%. За все покупки она заплатила 9180 руб. При этом сэкономила 32% их суммарной первоначальной стоимости. Найдите первоначальную стоимость шапки и ботинок.

Задача 2 (10 *баллов*). В окружности радиуса 8 см проведены хорда KL и диаметр PK, который образует с хордой угол $30°$. Через точку L к окружности проведена касательная, которая пересекает прямую PK в точке M. Найдите длину медианы KN треугольника KLM.

Задача 3 (10 *баллов*). При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x^2 - 2\sqrt{5}\cdot x + 5} + \sqrt{2 - 2\sqrt{2}\cdot x + x^2} = a$$

имеет бесконечно много корней?

Задача 4 (10 *баллов*). См. лист 2.

Задача 5 (10 *баллов*). По условию **Задачи 4** найдите расстояние между центром нижнего основания цилиндра и вершиной B'_1 призмы. Результат округлите до целого значения. Найдите тангенс угла между прямой, содержащей точки O'_P и B'_1 и плоскостью нижнего основания фигур. Результат округлите до целого значения.

Задача 6 (20 *баллов*). См. лист 3.

На этом листе запрещено делать записи и пометки

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

Вариант: 1 *класс: 8–9*

***Задача 4** (10 баллов). Даны горизонтальные проекции центров окружностей оснований наклонного цилиндра **O' и O'1**, вершин **A'** и **A'1** бокового ребра наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и центра квадрата **O'р** её нижнего основания. Нижние основания фигур расположены в одной плоскости. Основание цилиндра принадлежит горизонтальной плоскости проекций и его диаметр 70мм. Высота цилиндра 70 мм. Плоскость верхнего основания призмы параллельна плоскости верхнего основания цилиндра и ниже ее на 15 мм.*

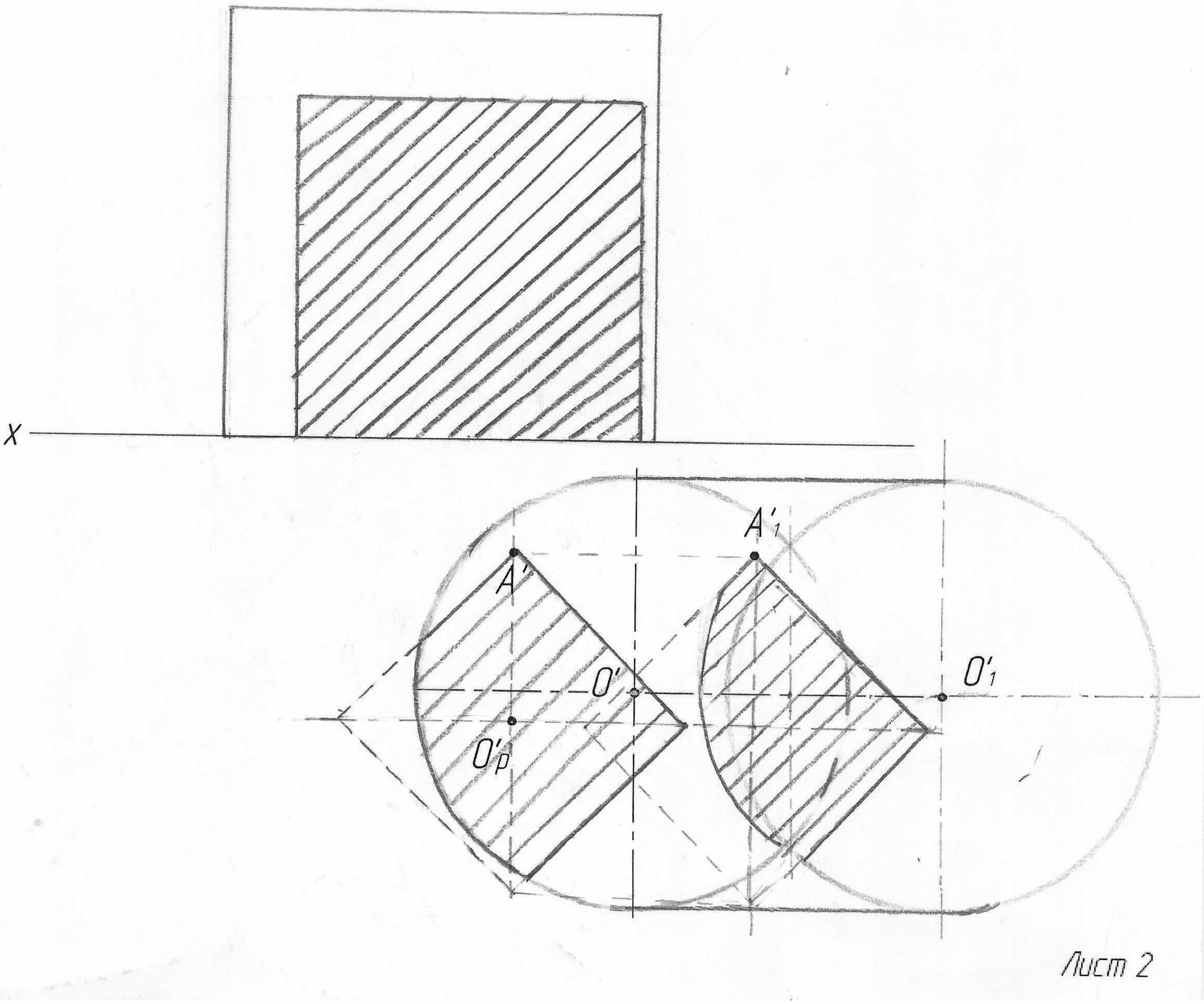
Требуется:

1) построить фронтальную и горизонтальную проекции наклонного цилиндра с учетом выреза в форме наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с соблюдением проекционной связи;

2) построить и обозначить проекции вершин призмы и границ участков линии выреза в цилиндре;

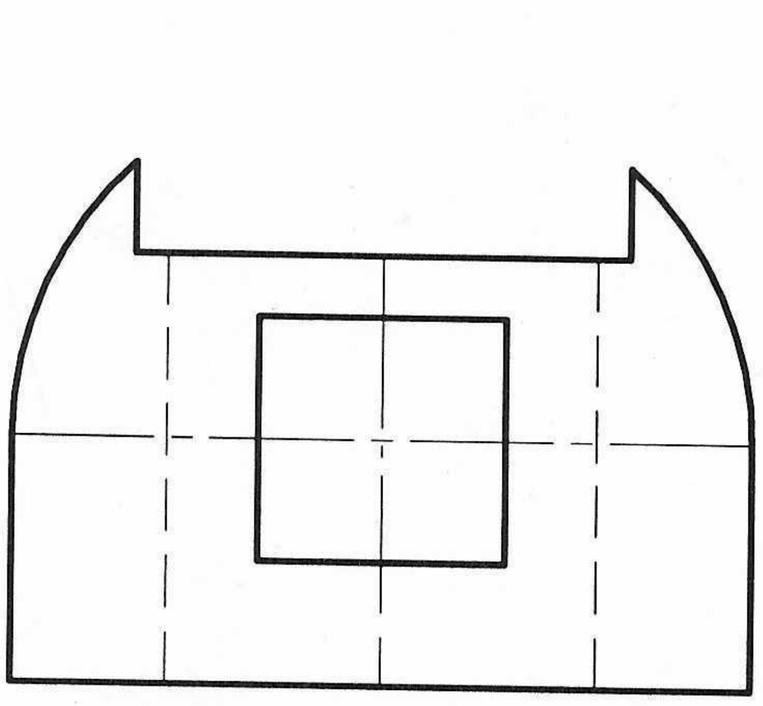
3) обозначить видимость линий цилиндра с вырезом и указать осевые и центровые линии;

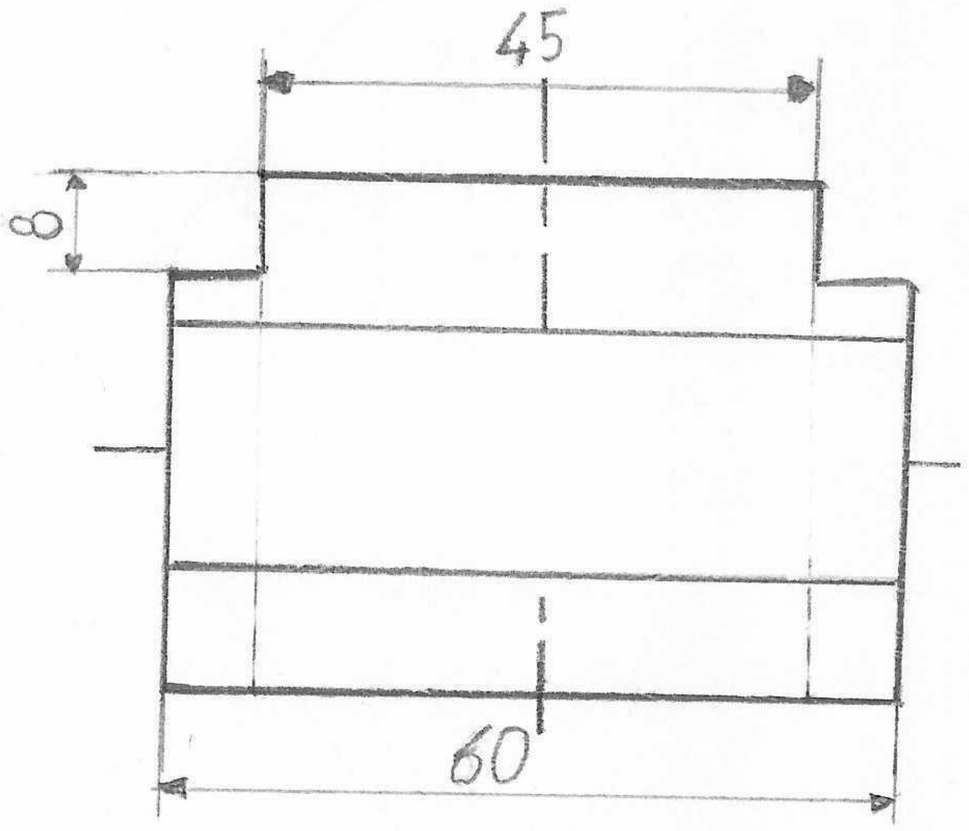
4) оформить все изображения в соответствии с требованиями ЕСКД.

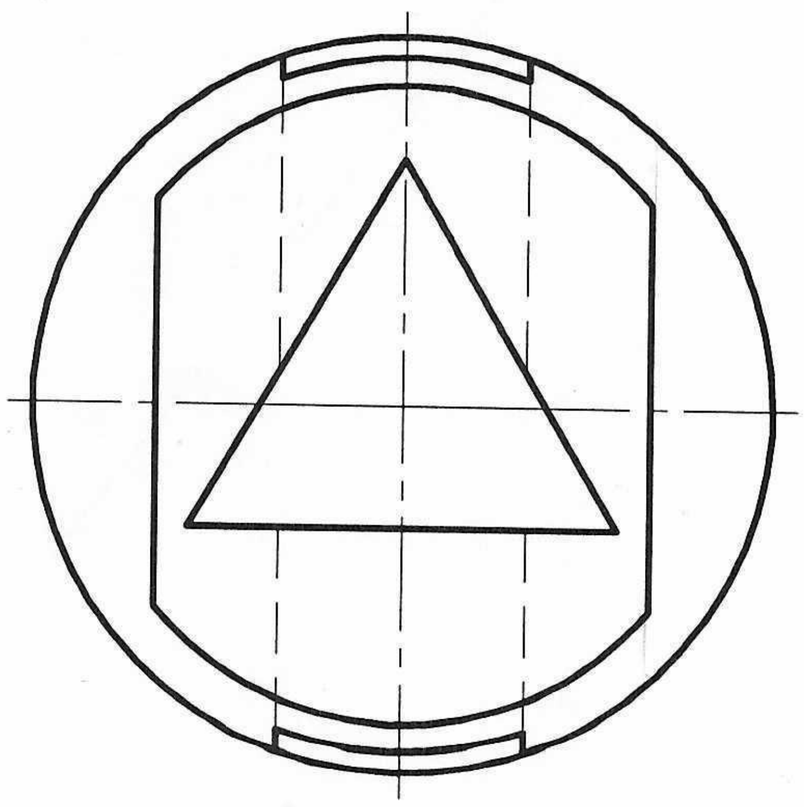


Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант:1 класс: 8–9

Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции предмета.
Требуется:
1) выполнить изображение предмета на месте вида слева как полный профильный разрез для случая без обозначения разреза;
2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза с обозначением разреза, плоскость разреза указать через ось цилиндра;
3) все изображения выполнить в проекционной связи на местах соответствующих основных видов и оформить по ГОСТ 2.305–2008;
4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303–68;
5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306–68;
6) проставить размеры по ГОСТ 2.307–2011;
7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.







Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

№1

Пусть x руб – стоимость ботинок, а y руб – стоимость кепки.

1) Стоимость без учёта скидки равна

$\frac{9180}{(100-32)\%} = \frac{9180}{68} = 13500$ руб

2) $x + y = 13500$ (из условия) (1)

и $(100\% - 40\%)x + (100\% - 20\%)y = 9180$ (из условия)

$0{,}6x + 0{,}8y = 9180$ (2)

3) Из (1) и (2) составим систему:

$$\begin{cases} x + y = 13500 \mid \cdot(-3) \\ 0{,}6x + 0{,}8y = 9180 \mid \cdot 5 \end{cases} \quad \begin{cases} -3x - 3y = -40500 \\ + \\ 3x + 4y = 45900 \end{cases}$$

$y = 5400$

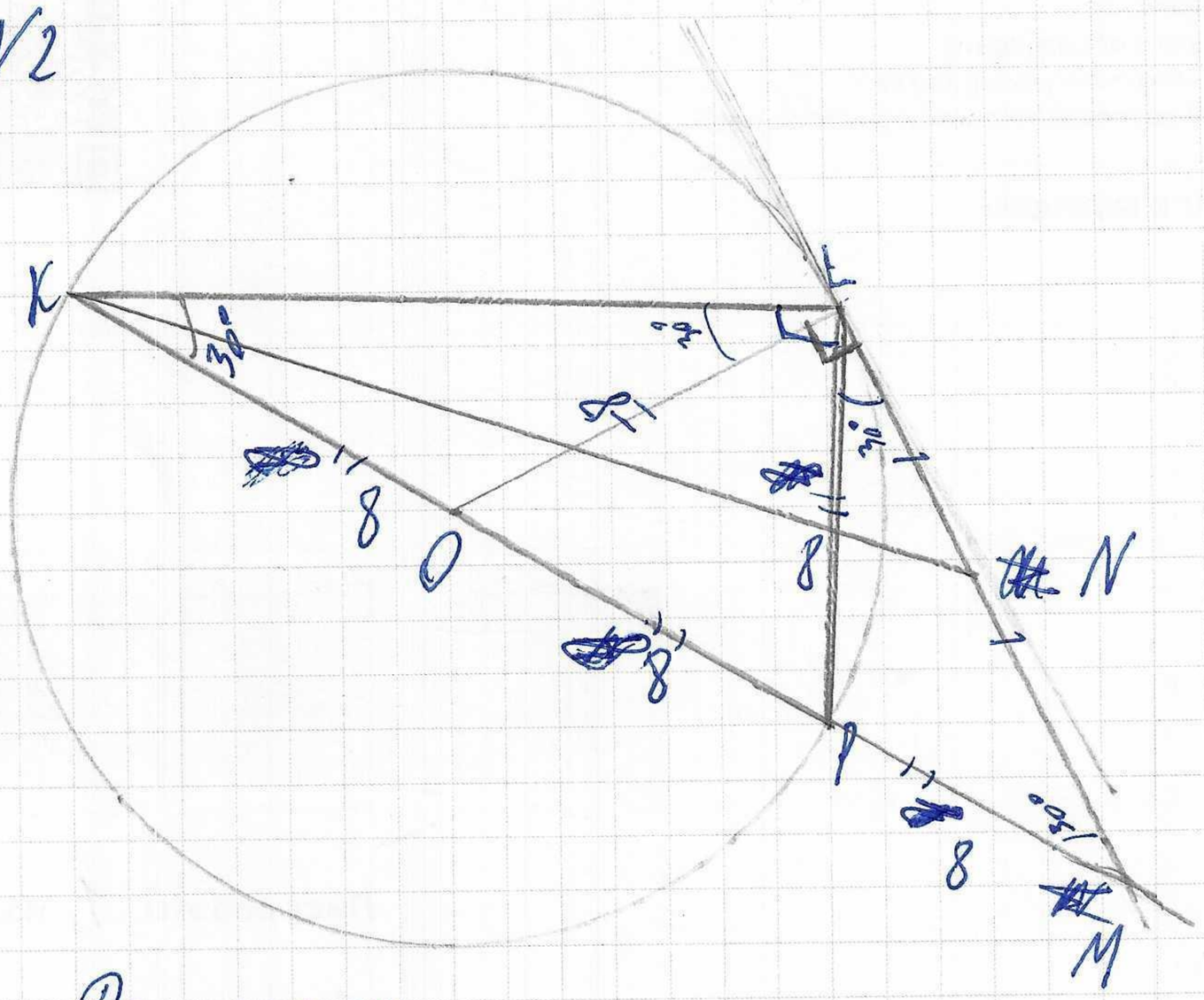
$x + y = 13500$

$x = 13500 - y = 13500 - 5400 = 8100$

Ответ: 5400 руб; 8100 руб.

Можно использовать оборот листа для записи решений

№2



Решение:

1) $KO = OP = \frac{1}{2}KP = \frac{16\text{см}}{2} = 8\text{см}$ (как радиусы, т.к. KP - диаметр (по постр.)

Проведём $LO = r = 8\text{см}$ (по постр.)

2) Проведём LP

$\triangle KLP$: Точка $L \in$ окр. и KP - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KLP = 90°$ (по свойству)

$\angle PKL = 30° \Rightarrow LP = \frac{1}{2}KP = \frac{16\text{см}}{2} = 8\text{см}$ (как катет, лежащий напротив угла 30°)

3) По т. Пифагора:

$KL^2 = KP^2 - LP^2$, $KL > 0$

$KL = \sqrt{KP^2 - LP^2} = \sqrt{16^2 - 8^2}\text{см} = 8\sqrt{3}\text{см}$

4) OL - радиус, проведённый в точку касания касательной LM с окружностью $\Rightarrow$

$\Rightarrow LO \perp LM$ (свойство) $\Rightarrow \angle OLM = 90°$

5) $KO = 8\text{см}$ (см. выше)

$OL = 8\text{см}$ (см. выше) $\Rightarrow \triangle KOL$ - р/б (по опред.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OKL = \angle OLK = 30°$ (по свойству)

$\angle PLM = \angle OLM - \angle QLP = \angle OLM - (\angle KLP - \angle KLO) = 90° - (90° - 30°) = 30°$

6) $\triangle OLP$: $LO = OP = LP = 8$ см (см. выше) $\Rightarrow \triangle OLP$ — р/с (по опред.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OLP = \angle LOP = \angle OPL = 60°$ (по свойству)

$\angle LPM = 180° - \angle OPL = 180° - 60° = 120°$ (как смежные)

$\angle PML = 180 - \angle LPM - \angle PLM = 180° - 120° - 30° = 30°$ (как сумма углов треугольника)

7) $\angle PML = 30°$ (см. выше)

$\angle PLM = 30°$ (см. выше) $\Rightarrow \triangle PLM$ — р/б (по опред.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow LP = PM = 8$ см (определение)

8) По т. косинусов:

$$LM^2 = LP^2 + PM^2 - 2 \cdot \cos(\angle LPL \angle LPM) \cdot LP \cdot PM, \quad LM > 0$$

$$LM = \sqrt{LP^2 + PM^2 - 2 \cdot \cos(\angle LPM) \cdot LP \cdot PM} = \sqrt{8^2 + 8^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8} =$$

$= 8\sqrt{3}$ см

9) $LN = \frac{LM}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ см (т.к. KN — медиана из угла)

$\angle KLN = \angle KLO + \angle OLM = 30° + 90° = 120°$

По т. косинусов:

$$KN^2 = KL^2 + LN^2 - 2 \cdot \cos(\angle KLN) \cdot KL \cdot LN, \quad KN > 0$$

$$KN = \sqrt{KL^2 + LN^2 - 2 \cdot \cos(\angle KLN) \cdot KL \cdot LN} =$$

$$= \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = 4\sqrt{21}$$ см

Ответ: $4\sqrt{21}$ см

№3

$$\sqrt{x^2-2\sqrt{5}x+5}+\sqrt{2-2\sqrt{2}\cdot x+x^2}=a$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2}=a$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(x-\sqrt{2})^2}=a$$

$$|x-\sqrt{5}|+|x-\sqrt{2}|=a$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-2\sqrt{5}x+5\geq 0 \\ 2-2\sqrt{2}\cdot x+x^2\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-\sqrt{5})^2\geq 0 \\ (x-\sqrt{2})^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in R$

1) пусть $a<0$

$$|x-\sqrt{5}|+|x-\sqrt{2}|<0$$

Т.к. модули не отрицательные, то их сумма не может быть меньше нуля $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $a<0$ нет корней

2) пусть $a=0$

$$|x-\sqrt{5}|+|x-\sqrt{2}|=0$$

$$\begin{cases} |x-\sqrt{5}|=0 \\ |x-\sqrt{2}|=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\sqrt{5} \\ x=\sqrt{2} \end{cases} \qquad \varnothing$$

$\Rightarrow$ при $a=0$ нет корней

3) пусть $a>0$

$$|x-\sqrt{5}|+|x-\sqrt{2}|>0$$

$$-|x-\sqrt{2}|<|x-\sqrt{5}|$$

Т.к ~~модуль~~ модуль ≥ 0, а сам выражение положительное значение ≤ 0

~~А~~ С одной стороны выражение ≤ 0, а с другой ≥ 0, значит надо учесть, что первое и второе выражение не будут одновременно равны нулю:

$$\begin{cases} x-\sqrt{2}=0 \\ x-\sqrt{5}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ x=\sqrt{5} \end{cases} \qquad \varnothing$$

$\Rightarrow x\in R$ при $a\in(0;+\infty)$

Ответ: $(0;+\infty)$

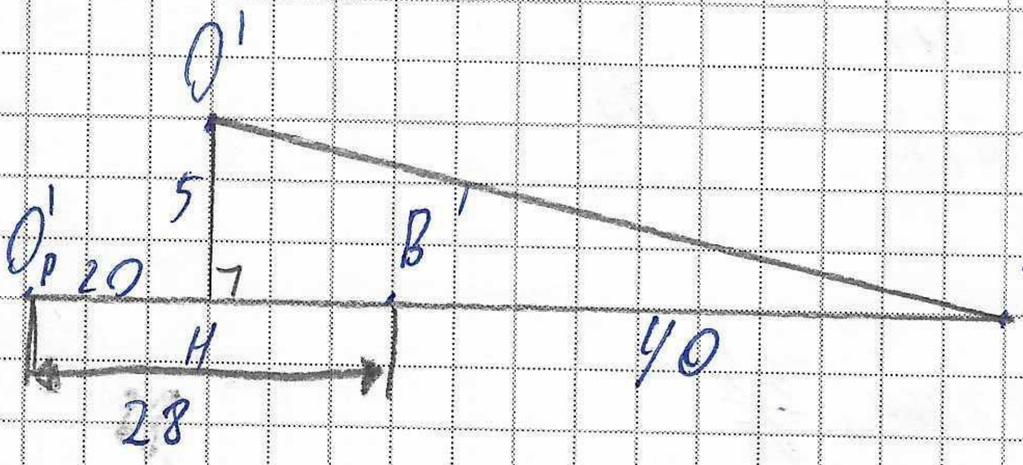
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

№5

На горизонтальной поверхности (вид сверху):



Из чертежа следует, что:

$O'_pH = 20$ мм; $O'_pB' = 28$ мм, $O'H = 5$ мм; $B'B'_1 = 40$ мм

$O'H \perp O'_pB'_1$

$\Delta HO'B'_1$ - прямоугольный

По т. Пифагора: $O'B'^2_1 = O'H^2 + HB'^2_1$, $O'B'_1 > 0$

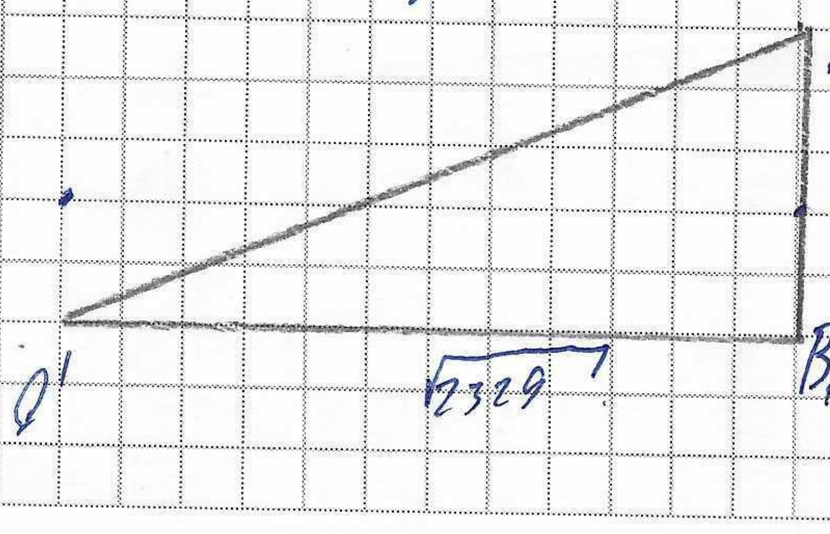
$O'B'_1 = \sqrt{O'H^2 + HB'^2_1}$

$HB'_1 = B'B'_1 + HB' = B'B'_1 + (O'_pB' - O'_pH) =$

$= 40 + (28 - 20) = 48$ мм

$OB'_1 = \sqrt{5^2 + 48^2} = \sqrt{25 + 256 \cdot 9} = \sqrt{2329}$ мм

Вид сбоку (так, чтобы было видно $O'B'_1$):



По т. Пифагора:

$O'B'^2_1 = B'_1B''^2_1 + O'B''^2_1$

$\Leftarrow$

$OB'_1 > 0$

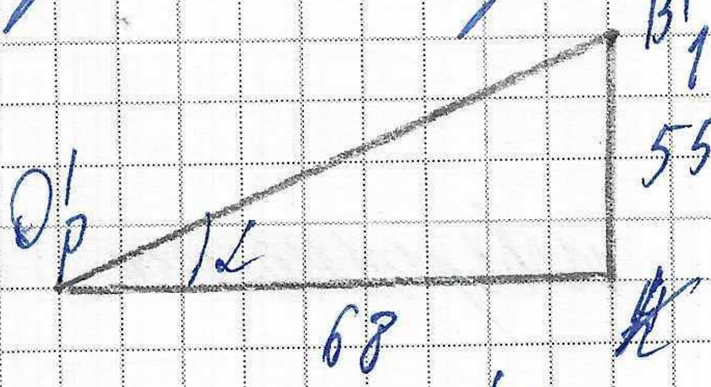
$\Rightarrow O'B'_1 = \sqrt{B'_1B''^2_1 + O'B''^2_1}$

Можно использовать оборот листа для записи решений

$O'B_1' = \sqrt{(\sqrt{2329} - 7)^2 + 55^2} = \sqrt{2329 + 3025} = \sqrt{5354} \approx$

≈ 73 мм

Вид сбоку. Вид слева:



$tg\alpha = \frac{B_1'k}{O'k} = \frac{55}{68}$

Ответ: 73 мм, $\frac{55}{68}$